

### 3. kontrolná opravná písomka z ADM (konaná dňa 14. 5. 2008)

#### 1. príklad.

Nech  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , vypočítajte

- (a)  $A + 2B$ ,
  - (b)  $3A - 6B$ ,
  - (c)  $AB$ ,
  - (d)  $BA$ ,
  - (e)  $A^T B^T$
  - (f)  $(AB)^T$ .
- (3 body)

#### 2. príklad.

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systém lineárnych rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

(3 body)

#### 3. príklad.

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

(3 body)

#### 4. príklad.

Skonstruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

$$S_1: x := 0$$

$$S_2: x := x + 1$$

$$S_3: y := 2$$

$$S_4: z := y$$

$$S_5: x := x + 2$$

$$S_6: y := x + z$$

(3 body)

#### 5. príklad.

Nech  $G$  je graf o  $|V|$  vrcholoch a  $|E|$  hranách. Nech  $M$  je maximálny stupeň vrcholov z  $G$  a nech  $m$  je minimálny stupeň vrcholov z  $G$ . Ukážte, že  $2|E|/|V| \geq m$  a  $2|E|/|V| \leq M$ . (3 body)

#### Prémiový príklad.

(1) Ako je definovaná hodnota matice?

(2) Ako je definovaná relácia ekvivalentnosti ( $A \sim B$ ) pre matice?

(2 body)

**1. príklad.**

Nech  $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$  a  $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ , vypočítajte

(a)  $A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix},$

(b)  $3A - 6B = \begin{pmatrix} -3 & -21 \\ 9 & 3 \end{pmatrix},$

(c)  $AB = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix},$

(d)  $BA = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix},$

(e)  $A^T B^T = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -5 & 4 \end{pmatrix},$

(f)  $(AB)^T = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}.$

**2. príklad.**

Pomocou Gaussovej eliminačnej metódy riešte systémy lineárnych rovníc

$$2x_1 - x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 5$$

$$x_1 + x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 7$$

$$x_1 + 3x_3 + 2x_4 = 4$$

$$x_2 + x_3 + x_4 = 3$$

$$A' = \left( \begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 4 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \\ \sim \left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

$$x_4 = l, \quad x_3 = k, \quad x_2 = 3 - k - l, \quad x_1 = 4 - 3k - 2l, \quad \text{kde } k, l \in \mathbb{R},$$

$$x = \begin{pmatrix} 4 - 3k - 2l \\ 3 - k - l \\ k \\ l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + l \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(3 body)

**3. príklad.**

Vypočítajte determinant matice:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -8$$

(3 body)

#### 4. príklad.

Skonstruujte graf plánovania udalostí pre nasledujúci program:

$S_1: x := 0$

$S_2: x := x + 1$

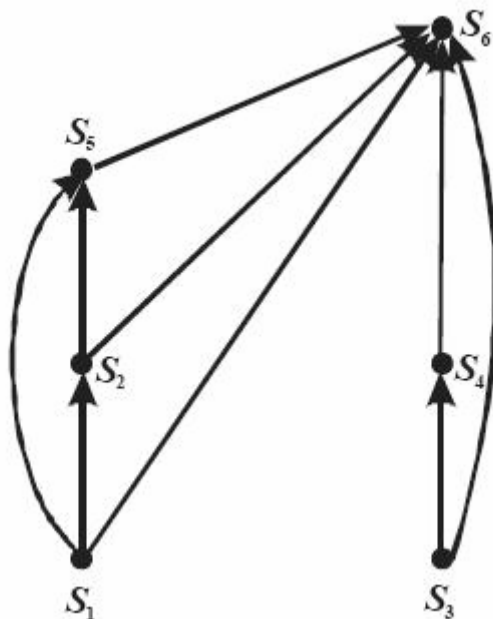
$S_3: y := 2$

$S_4: z := y$

$S_5: x := x + 2$

$S_6: y := x + z$

Riešenie:



(3 body)

#### 5. príklad.

Nech  $G$  je graf o  $|V|$  vrcholoch a  $|E|$  hranách. Nech  $M$  je maximálny stupeň vrcholov z  $G$  a nech  $m$  je minimálny stupeň vrcholov z  $G$ . Ukážte, že  $2|E|/|V| \geq m$  a  $2|E|/|V| \leq M$ .

Riešenie:  $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq \sum_{v \in V} m = |V|m$

$$2|E| \geq |V|m$$

$$2|E|/|V| \geq m$$

$$2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \leq \sum_{|V|} M = |V|m$$

$$2|E| \leq |V|m$$

$$2|E|/|V| \leq m$$

(3 body)

**Prémiový príklad.**

len pre nulové koeficienty  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$ .

(1) Hodnosť matice  $A$  je definovaná  $h(A) = h_s(A) = h_r(A)$

(2) Ako je definovaná relácia ekvivalentnosti pre matice?

Matice  $A$  a  $B$  sú ekvivalentné,  $A \sim B$ , vtedy a len vtedy, ak majú rovnakú hodnotu,  $h(A) = h(B)$ .

(3 body)